Examen del 28 de junio de 2019

Cálculo vectorial.

La resultante de un sistema de vectores deslizantes es el vector $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y el momento del sistema respecto del punto $A(1, 2, 3)$ es el vector $\boldsymbol{M}_A = 3 \cdot \boldsymbol{i} + 3 \cdot \boldsymbol{k}$. Determinar el punto del plano $x + 2 \cdot y + 4 \cdot z = 1$ en el que el momento del sistema es ortogonal al plano.

Por definición, el momento del sistema en el punto pedido $P(1 - 4 \cdot z - 2 \cdot y - 1, y, z)$

$$\boldsymbol{M}_P = \boldsymbol{M}_A + \boldsymbol{PA} \wedge \boldsymbol{R}$$

debiendo cumplirse además que

$$\boldsymbol{M}_P \wedge \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

siendo $\boldsymbol{u}$, el vector característico del plano, es decir $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + 2 \cdot \boldsymbol{j} + 4 \cdot \boldsymbol{k}$.
Por tanto,

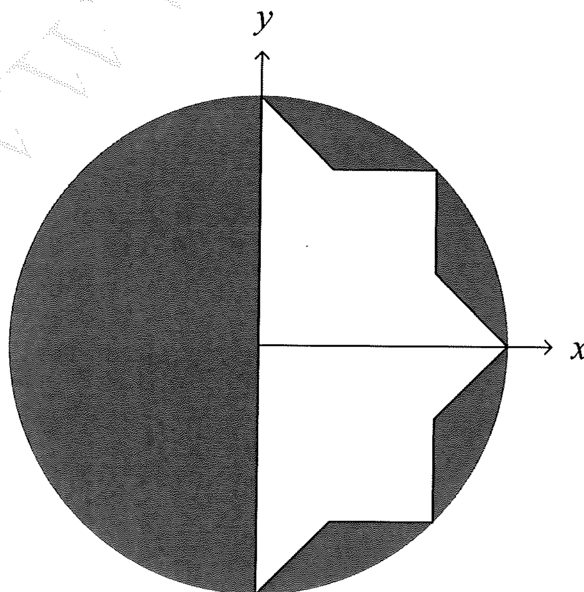
$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{M}_A \wedge \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{PA} \wedge \boldsymbol{R}) \wedge \boldsymbol{u}$$

lo que conduce al punto $P(-3/7, 1, -1/7)$.

Geometría de Masas.

La estrella *tartésica* o *mudéjar* es una estrella de ocho puntas que se origina por la superposición de dos cuadrados iguales, de lado a, de modo que su centro sea común y las diagonales formen un ángulo de $\pi/4$. Considere el círculo circunscrito a la estrella mudéjar al que se le quita la mitad de una estrella mudéjar, como se indica en la figura, determinar:

1. si la densidad superficial es $\rho = 1/a^2$, la masa de la placa.
2. la posición del centro de gravedad de dicha placa.



© 2019 Tecnun (University of Navarra)

1. Masa de la placa.

   Si se llama l a la longitud de cada una de las líneas rectas del contorno de la estrella, se puede comprobar que

$$l = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$$

   El área total de la placa es

$$A_{circulo} = \pi \cdot \frac{a^2}{2}$$

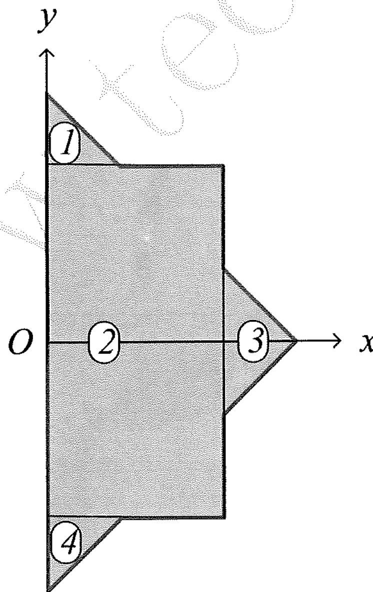
$$A_{estrella} = \frac{a^2}{2} + 2 \cdot \frac{l^2}{2} = a^2 \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{3+2\cdot\sqrt{2}}$$

   Por consiguiente,

$$M = \frac{\pi}{2} - \frac{2+\sqrt{2}}{3+2\cdot\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2} - 2 + \sqrt{2}$$

2. Centro de gravedad.

   Se empieza considerando el centro de gravedad de la mita de la estrella. Por simetría se ve que el centro de gravedad ha de estar en el eje x. La figura se puede subdividir en tres triángulos y un rectángulo, como se indica en la figura



   - Triángulo 1.

$$M_1 = \rho \cdot \frac{l^2}{4}$$

$$OG_1 = \frac{0+0+\frac{l\cdot\sqrt{2}}{2}}{3} \cdot i + \frac{\frac{a}{2} + \frac{l\cdot\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}}{3} \cdot j$$

www.tecnun.es

- Rectángulo 2.

$$\begin{aligned}M_2 =&\rho \cdot \frac{a^2}{2}\\ OG_2 =&\frac{a}{4} \cdot \boldsymbol{i}\end{aligned}$$

- Triángulo 3.

$$\begin{aligned}M_3 =&\rho \cdot \frac{l^2}{2}\\ OG_3 =&\frac{\frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{l \cdot \sqrt{2}}{2}}{3} \cdot \boldsymbol{i}\end{aligned}$$

- Triángulo 4.

$$\begin{aligned}M_4 =&\rho \cdot \frac{l^2}{4}\\ OG_4 =&\frac{0 + 0 + \frac{l \cdot \sqrt{2}}{2}}{3} \cdot \boldsymbol{i} + \frac{-\frac{a}{2} - \frac{l \cdot \sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2} - \frac{a}{2}}{3} \cdot \boldsymbol{j}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$OG_{estrella} = \frac{M_1 \cdot OG_1 + M_2 \cdot OG_2 + M_4 \cdot OG_4 + M_4 \cdot OG_4}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} = a \cdot \frac{2 + 3 \cdot \sqrt{2}}{24} \cdot \boldsymbol{i}$$

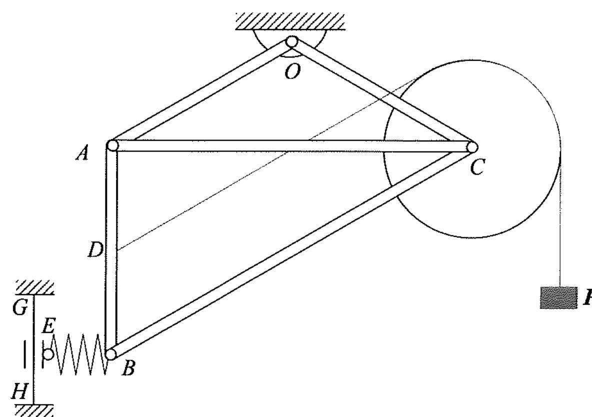
Como el centro de gravedad del círculo ocupa la posición $(0, 0)$

$$OG = -\frac{\frac{2 + 3 \cdot \sqrt{2}}{24} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{3 + 2 \cdot \sqrt{2}}}{\frac{\pi}{2} - 2 + \sqrt{2}} \cdot a \cdot \boldsymbol{i} = \frac{5 + 4 \cdot \sqrt{2}}{6 \cdot (3 + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot (\pi - 4 + 2 \cdot \sqrt{2})} \cdot a \cdot \boldsymbol{i}$$

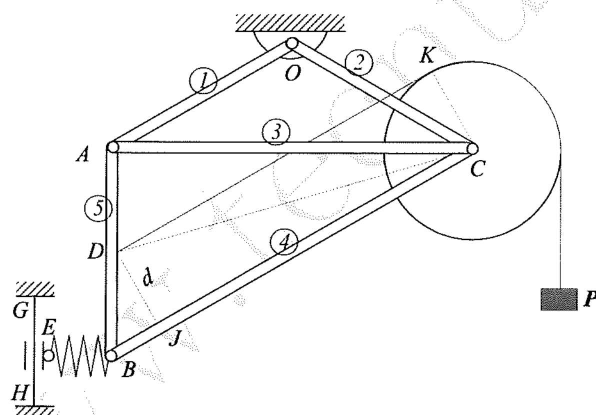
Estática.

El sistema de la figura está en un plano vertical y consta de cinco barras –OA, AB, BC, AC y OC– de masa despreciable. El triángulo OAC es isósceles de lados iguales, OA y OC, de longitud L y ángulo desigual es $2 \cdot \pi/3$. El triángulo ABC es rectángulo en A y el ángulo en C es de $\pi/6$. El radio de la polea es $L \cdot \sqrt{3}/4$. El resorte –de constante elástica $k = P/L$– está vinculado mediante una deslizadera en E a la guía vertical GH. Tiene una cuerda apoyada que sostiene un peso $\boldsymbol{P}$. El peso de la polea es a su vez $\boldsymbol{P}$. La cuerda está amarrada en el otro extremo al punto medio de la barra AB. En la posición de equilibrio la barra AB está vertical, como se indica en la figura. Se desea conocer la elongación del resorte, así como la tensión de la barra AC indicando si está sometida a tracción o a compresión.

Nota importante: *No saque conclusón alguna de la figura que no haya sido expuesta en el enunciado. Es decir, la inclinación de la cuerda amarrada a la barra AB no es dato (demuestre que es $\pi/6$ con la horizontal) ni tampoco la inclinación del resorte.*

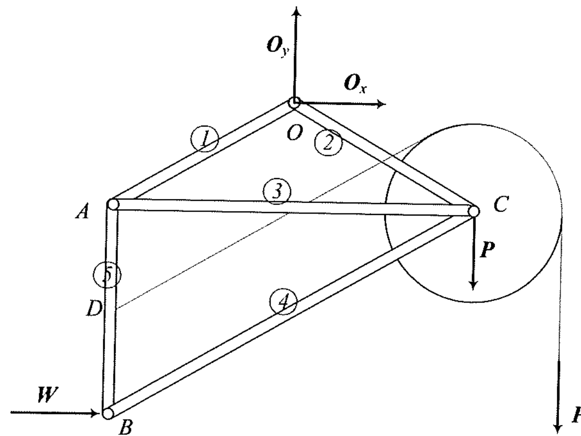


Geometría. La distancia del punto D a la barra BC es $d = L \cdot \sqrt{3}/4$, que coincide con el radio de la polea, teniendo en cuenta la geometría del triángulo ABC. Como se puede observar los triángulos DJC y DKC son rectángulos con hipotenusa común y uno de los catetos tiene la misma longitud en ambos. De ahí se deduce que el otro cateto ha de ser de igual longitud. Por tanto, ambos triángulos son iguales y la figura $DJCK$ es un rectángulo. Por consiguiente, la cuerda es paralela a la barra BC, es decir, forma un ángulo de $\pi/6$ con la horizontal.



Como la guía es vertical, la fuerza, que se ejerce sobre el resorte en el punto E, es horizontal. Como el resorte está en equilibrio, la fuerza que este ejerce en B ha de ser colineal con aquella. Por tanto, la disposición del resorte es horizontal.

Equilibrio quitando los enlaces exteriores. Soltando los enlaces exteriores y poniendo las fuerzas aplicadas



$$O_x + W = 0$$
$$O_y - 2 \cdot P = 0$$
$$W \cdot \frac{3 \cdot L}{2} - P \cdot \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2} - P \cdot \left(\frac{L \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

de donde se llega a que

$$W = P \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6}$$
$$O_x = -P \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6}$$
$$O_y = 2 \cdot P$$

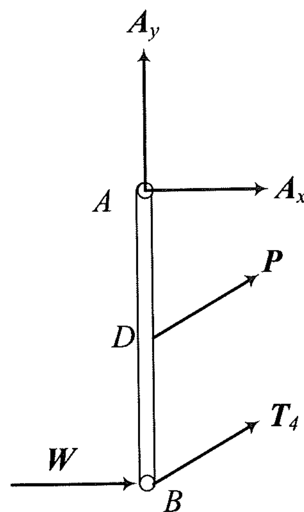
Por tanto, la elongación del resorte es

$$\Delta = \frac{5 \cdot L \cdot \sqrt{3}}{6}$$

Equilibrio soltando los enlaces interiores. Se hace la hipótesis de que todas las barras, sometidas exclusivamente a fuerzas en los extremos, trabajan a tracción. Nos referimos a la barras 1, 2, 3 y 4.

Barra AB**.** Planteando el equilibrio de esta barra

www.tecnun.es

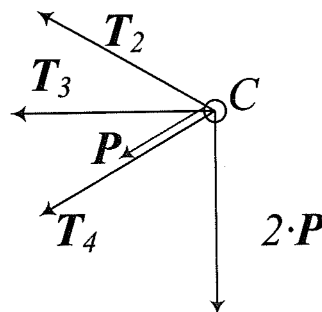


$$W+T_4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+A_x=0$$
$$A_y+P\cdot\frac{1}{2}+T_4\cdot\frac{1}{2}=0$$
$$W\cdot L+T_4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot L+P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{L}{2}=0$$

De donde se obtiene que

$$A_x=-P\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$A_y=P\cdot\frac{7}{12}$$
$$T_4=-P\cdot\frac{13}{6}$$

Articulación C. Con las fuerza s en esa articulación



$$-T_4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-P\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-T_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-T_3=0$$
$$-P\cdot\frac{1}{2}-T_4\cdot\frac{1}{2}-2\cdot P+T_2\cdot\frac{1}{2}=0$$

© 2019 Tecnun (University of Navarra)

www.tecnun.es

de donde se concluye que

$$T_3 = -P \cdot \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6}$$
$$T_2 = P \cdot \frac{17}{6}$$

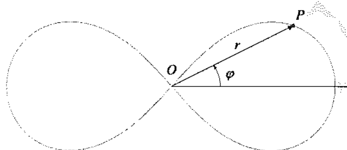
La barra AC trabaja a compresión.

Cinemática y Dinámica.

Un punto de masa unidad está vinculado a una *lemniscata de Bernouilli*, situada en un plano vertical y de ecuación, en coordenadas polares, es decir, en cilíndricas planas,

$$r^2 = 2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi)$$

sometido a la acción de una fuerza atractiva, que *dimana* del origen de coordenadas y proporcional a la distancia, constante de proporcionalidad 3 N/m y de su propio peso –considérese $g = 10\ m/s^2$–. Se observa que, cuando $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 1\ rad/s$. Determinar la fuerza de enlace *(12 puntos)* entre la partícula y la curva en esa posición, así como la aceleración de la partícula *(12 puntos)*. Determine el radio de curvatura de flexión de la curva en ese punto *(3.5 puntos)*.



1. Cinemática. Recordando el paso de coordenadas cartesianas a cilíndricas
La velocidad y aceleración en cilíndricas es

$$\boldsymbol{v} = \dot{r} \cdot \boldsymbol{E}_r + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$
$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2) \cdot \boldsymbol{E}_r + (2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + r \cdot \ddot{\varphi}) \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

como

$$r = \sqrt{2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi)}$$

entonces

$$\boldsymbol{v} = -\frac{\sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \cdot \dot{\varphi}}{\sqrt{\cos(2 \cdot \varphi)}} \cdot \boldsymbol{E}_r + \sqrt{2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi)} \cdot \dot{\varphi} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$
$$\boldsymbol{a} = \sqrt{2} \cdot \frac{-2 \cdot \cos^2(2 \cdot \varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 - \sin(2 \cdot \varphi) \cdot \cos(2 \cdot \varphi) \cdot \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2}{\cos(2 \cdot \varphi) \cdot \sqrt{\cos(2 \cdot \varphi)}} \cdot \boldsymbol{E}_r + \sqrt{2} \cdot \frac{-2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \cdot \dot{\varphi}^2 + \cos(2 \cdot \varphi) \cdot \ddot{\varphi}}{\sqrt{\cos(2 \cdot \varphi)}} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

En la posición dada $\varphi = 0$ y $\dot{\varphi} = 1$

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{2} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$
$$\boldsymbol{a} = -3 \cdot \sqrt{2} \cdot \boldsymbol{E}_r + \sqrt{2} \cdot \ddot{\varphi} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

2. Fuerzas.

1. **Aplicadas**. En la posición pedida

   a) El peso.

   $$\boldsymbol{F}_{ap1} = -10 \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

b) La fuerza atractiva

$$\boldsymbol{F}_{ap2} = -3 \cdot \sqrt{2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi)} \cdot \boldsymbol{E}_r = -3 \cdot \sqrt{2} \cdot \boldsymbol{E}_r$$

2. **Enlace**. Al no haber rozamiento el trabajo elemental de la fuerza de enlace al moverse la partícula sobre la superficie esférica ha de ser nulo. Por tanto, si

$$\boldsymbol{F}_{en} = F_r \cdot \boldsymbol{E}_r + F_\varphi \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

entonces

$$\boldsymbol{F}_{en} \cdot d\boldsymbol{OP} = 0$$

$$-F_r \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \varphi) \cdot d\varphi}{\sqrt{\cos(2 \cdot \varphi)}} + F_\varphi \cdot \sqrt{2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi)} \cdot d\varphi = 0$$

de donde se concluye que cuando $\varphi = 0$

$$F_\varphi = 0$$

es decir,

$$\boldsymbol{F}_{en} = F_r \cdot \boldsymbol{E}_r$$

$$\boldsymbol{F}_{ac} = \left(-3 \cdot \sqrt{2} + F_r\right) \cdot \boldsymbol{E}_r - 10 \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

3. Ecuaciones de la Dinámica. Aplicaremos el teorema del momento lineal en la posición dada

$$-3 \cdot \sqrt{2} = -3 \cdot \sqrt{2} + F_r$$
$$\sqrt{2} \cdot \ddot{\varphi} = -10$$

que resulta

$$F_r = 0$$
$$\ddot{\varphi} = \frac{-10}{\sqrt{2}}$$

Por tanto

$$\boldsymbol{a} = -3 \cdot \sqrt{2} \cdot \boldsymbol{E}_r - 10 \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$
$$\boldsymbol{F}_{en} = 0 \cdot \boldsymbol{E}_r + 0 \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

Conocidas la velocidad y la aceleración de la partícula en esa posición

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{2} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}_\varphi$$
$$\boldsymbol{a} = -3 \cdot \sqrt{2} \cdot \boldsymbol{E}_r - 10 \cdot \boldsymbol{E}_\varphi$$

teniendo en cuenta el teorema de Huygens

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{E}_t = -\frac{v^2}{\rho} \cdot \boldsymbol{E}_b$$

de donde se llega a que

$$\rho = \frac{v^2}{|\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{E}_t|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

www.tecnun.es

Teoría.

1. Defina el concepto de enlace mecánico.

   Mire sus notas teoría.

2. Defina el concepto de fuerza de enlace.

   Mire sus notas teoría.

3. Una partícula, P, en el instante $t = 0$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{OP}(0) =& 2 \cdot \boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v}(0) =& \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{a}(0) =& -2 \cdot \boldsymbol{j} \\ \dot{\boldsymbol{a}}(0) =& -\boldsymbol{i} - 6 \cdot \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

siendo $\dot{\boldsymbol{a}}$ la sobreaceleración –derivada de la aceleración respecto del tiempo–. Determine, si es posible, los radio de curvatura de flexión *(4 puntos)* y de torsión *(4 puntos)* de la trayectoria de la partícula para $t = 0$.

Con los datos del problema

$$\begin{aligned} v =& 1 \\ \frac{dv}{dt} =& 0 \\ \boldsymbol{E}_t =& \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{E}_n =& -\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{E}_b =& -\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

De la aceleración se infiere que

$$\rho = \frac{1}{2}$$

Recordando el teorema de Huygens y las fórmulas de Frenet

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{dv}{dt} \cdot \boldsymbol{E}_t + \frac{v^2}{\rho} \cdot \boldsymbol{E}_n$$

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{E}_t}{ds} =& \frac{\boldsymbol{E}_n}{\rho} \\ \frac{d\boldsymbol{E}_n}{ds} =& -\frac{\boldsymbol{E}_t}{\rho} + \frac{\boldsymbol{E}_b}{\tau} \end{aligned}$$

Derivando respecto a t

$$\dot{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{d^2v}{dt^2} \cdot \boldsymbol{E}_t + \frac{v}{\rho} \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \boldsymbol{E}_n + \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{E}_n + \frac{v^3}{\rho} \cdot \left(-\frac{1}{\rho} \cdot \boldsymbol{E}_t + \frac{1}{\tau} \cdot \boldsymbol{E}_b\right)$$

Multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{E}_b$

$$\dot{\boldsymbol{a}}(t) \cdot \boldsymbol{E}_b = \frac{v^3}{\rho} \cdot \frac{1}{\tau}$$

Por consiguiente,

$$6 = 2 \cdot \frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{1}{3}$$

www.tecnun.es

4. Sabiendo que en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\rho &= \sin(\theta)\cdot\cos(\varphi)\cdot\boldsymbol{i} + \sin(\theta)\cdot\sin(\varphi)\cdot\boldsymbol{j} + \cos(\theta)\cdot\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{E}_\theta &= \cos(\theta)\cdot\cos(\varphi)\cdot\boldsymbol{i} + \cos(\theta)\cdot\sin(\varphi)\cdot\boldsymbol{j} - \sin(\theta)\cdot\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{E}_\varphi &= -\sin(\varphi)\cdot\boldsymbol{i} + \cos(\varphi)\cdot\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

deduzca las componentes del vector $\boldsymbol{\omega}$, empleado en la derivación de un vector expresado en coordenadas esféricas.

Mire sus notas teoría.

5. Enuncie las dos primeras leyes de Newton.

Mire sus notas teoría.

www.tecnun.es